Géométrie du cercle et similitudes.

Dans le plan affine euclidien orienté, on considère un cercle $\mathcal{C}$ et une corde $[AB]$ de ce cercle. On note O le milieu de $[AB]$ et l'on trace deux autres cordes $[CD]$ et $[EF]$ du cercle $\mathcal{C}$ passant par O. Soit G (resp. H) l'intersection de (CE) (resp. (FD)) et (AB). Le but du problème est de prouver de deux manières différentes que O est le milieu de $[GH]$.

1) Première méthode : Soit Δ la médiatrice de $[AB]$ et s la réflexion par rapport à Δ. On note $s(F) = F'$ et $s(D) = D'$.

a) Faire une figure.

b) Démontrer l'égalité d'angles orientés de droites : $(OG, OF') = (CG, CF')$ (π). Que peut-on dire des points O, G, C, F' ?

c) Démontrer l'égalité : $(F'O, F'G) = (F'O, F'D')$ (π).

d) Conclure.

2) Deuxième méthode : La parallèle à (CE) passant par H coupe les droites (CD) et (EF) respectivement en K et L.

a) Faire une nouvelle figure.

b) Démontrer les égalités :

$$\overline{HL}\,\overline{HK} = \overline{HD}\,\overline{HF} \quad (1) \; ; \qquad \frac{\overline{OH}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{GC}} \quad (2).$$

c) En déduire

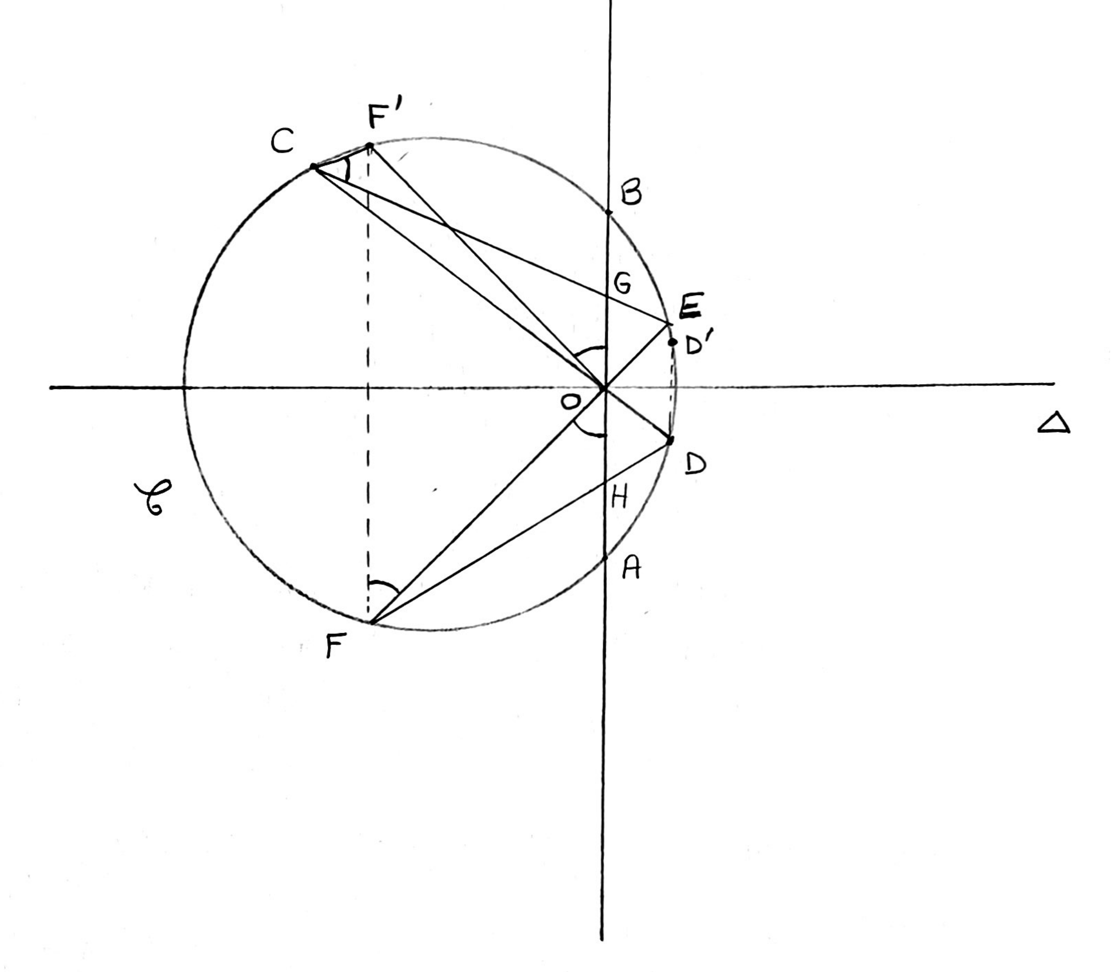
$$\frac{OH^2}{OG^2} = \frac{\overline{HD}\,\overline{HF}}{\overline{GC}\,\overline{GE}} \quad (3)$$

puis l'égalité $OH = OG$.

Solution :

[0] [ucer0002] Dany-Jack Mercier
(adapté de l'énoncé sommaire et mal résolu du Vauthier, ex. oral du capes, n°53 p 120)

1.a)



1.b)

$$(OG, OF') \underset{sym.}{=} (OF, OA) = (FE, FF') \underset{coc.}{=} (CE, CF') = (CG, CF')$$

Les points O, G, C, F' n'étant pas alignés, ils seront cocycliques.

1.c)

$$(F'O, F'G) \underset{coc.}{=} (CO, CG) = (CD, CE) \underset{coc}{=} (FD, FE)$$
$$= (FD, FO)$$
$$\underset{sym}{=} (F'O, F'D')$$

donc $(F'G) \parallel (F'D')$. Autrement dit les pts F', G, D' sont alignés.

1.d) Vu le c), $G \in (F'D') \cap (AB)$. Comme $s(H) \in s(FD) \cap s(AB) = (F'D') \cap (AB)$,

et comme $(F'D') \not\parallel (AB)$, on déduit : $\boxed{s(H) = G}$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- L'homothétie h de centre O et rapport $\frac{\overline{OH}}{\overline{OG}}$ transforme les pts E, G, C en L, H, K. Donc

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{LH}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{GC}} \qquad (2)$$

2.c • (1) et (2) entraînent

$$\frac{OH^2}{OG^2} = \frac{\overline{LH} \times \overline{HK}}{\overline{EG}.\overline{GC}} = \frac{\overline{HD}.\overline{HF}}{\overline{GC}.\overline{GE}} \qquad (3)$$

- La puissance de H / au cercle $\mathcal{C}$ est :

$$\overline{HD}.\overline{HF} = \overline{HA}.\overline{HB} = (\overline{HO} + \overline{OA}).(\overline{HO} + \overline{OB}) = OH^2 - OA^2$$

De même,

$$\overline{GC}.\overline{GE} = \overline{GA}.\overline{GB} = OG^2 - OA^2$$

(3) entraîne alors :

$$\frac{OH^2}{OG^2} = \frac{OH^2 - OA^2}{OG^2 - OA^2} = \frac{OA^2}{OA^2} = 1$$

d'où $\boxed{OH = OG}$ □

Trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ de même rayon r et de centres respectifs O_1, O_2, O_3 passent par un même point A. $\mathcal{C}_1$ recoupe $\mathcal{C}_2$ en B et $\mathcal{C}_3$ en C. $\mathcal{C}_2$ recoupe $\mathcal{C}_3$ en D.

Mq A est l'orthocentre du triangle BCD.

(réf : extrait d'une activité de 2nde relevée sur "Modules aquitains en seconde", cf Repères IREM n° 20 de juillet 95)

• 1ère solution : On utilise le résultat suivant :
Dans la figure 1, A, M, C sont alignés
(preuve : (BM) est perp. à (AM) et à (CM) ...)

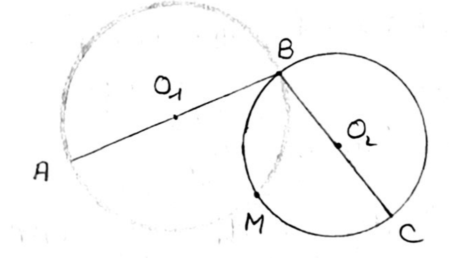


fig 1

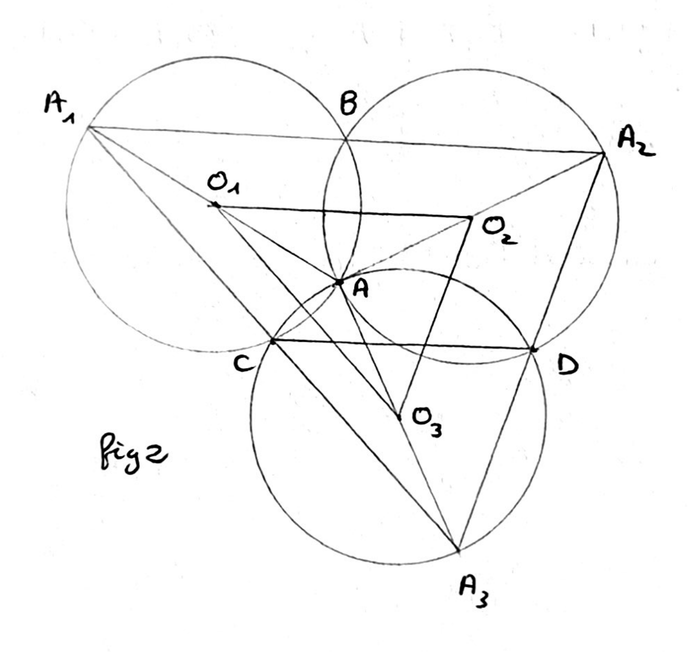


fig 2

On complète la fig. 2 en traçant les points A_1, A_2, A_3 diamétralement opposés à A sur $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ resp. Le résultat rappelé mq A_1, B, A_2 sont alignés, $A_1 C A_3$ aussi et $A_2 D A_3$ aussi. De plus $(AB) \perp (A_1A_2)$ et $AA_1 = 2r = AA_2$ montrent que (AB) est la médiatrice de $[A_1A_2]$. En particulier B est le milieu de $[A_1A_2]$.
Le même raisonnement prouve que C est le milieu de $[A_1A_3]$ et D celui de $[A_2A_3]$.
La réciproque de Thalès montre alors que $(CD) \parallel (A_1A_2)$.

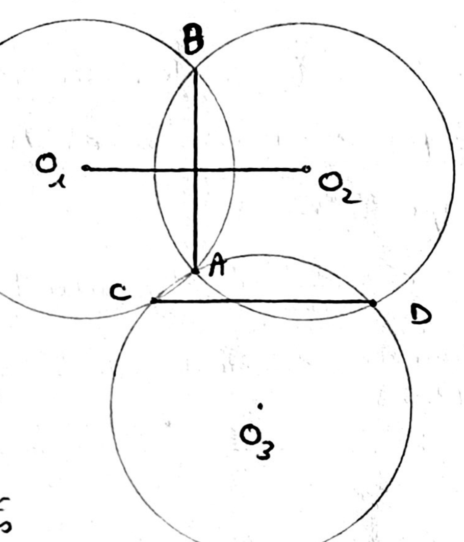
Enfin :

$$\left.\begin{array}{l}(CD) \parallel (A_1A_2) \\ (AB) \perp (A_1A_2)\end{array}\right\} \Rightarrow (AB) \perp (CD) \Rightarrow \text{A sur la hauteur issue de B du triangle BCD}$$

En recommençant 3 fois, A est l'orthocentre de BCD □.

• 2ᵉ solution : Vectorielle (inédite)

On utilisera les 3 losanges O_1AO_2B, O_1AO_3C et O_2AO_3D apparaissant sur le dessin.



(~~O_1AO_2B est un losange~~ car ~~il est facile de voir que B et A sont symétriques % (O_1O_2)~~, ~~et que $O_1B = O_2B = O_2A = O_1A = r$~~)

O_1AO_2B est un losange car possède 4 côtés égaux. Ses diagonales (O_1O_2) et (AB) sont perpendiculaires.

Tout revient à montrer que $(AB) \perp (CD)$. On a :

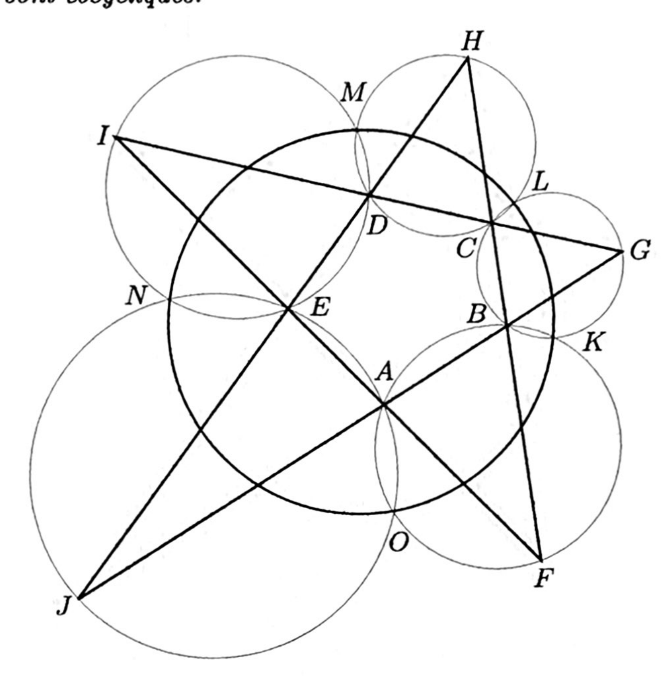
$$\vec{CD} = \vec{CO_3} + \vec{O_3D} = \vec{O_1A} + \vec{AO_2} = \vec{O_1A} + \vec{O_1B} = \vec{O_1O_2}$$

□

3ᵉ solution : Composition d'homothéties signalée dans l'article. Je ne l'avais pas

Pentagramme de Miquel

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe prolongé en un pentagramme $FGHIJ$ ($F = (AE) \cap (BC), G = (AB) \cap (CD), \ldots$). Soit K (resp. L, M, N, O) le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BCG (resp. BCG et CDH, CDH et DEI, DEI et EFJ, EFJ et ABF).
Les points K, L, M, N et O sont cocycliques.



Démonstration
Montrons que les points K, L, N et O sont cocycliques, *i.e.* que $\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \pi$.
Or :

$$\widehat{OKB} = \pi - \widehat{OAB} = \widehat{OAJ} = \widehat{ONJ}$$

et

$$\widehat{BKL} = \widehat{BGL} = \widehat{JGL}$$

Donc :

$$\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \widehat{OKB} + \widehat{BKL} + \widehat{ONL} = \widehat{ONJ} + \widehat{JGL} + \widehat{ONL} = \widehat{JGL} + \widehat{LNJ}$$

Il faut donc montrer la cocyclicité des points G, L, N et J. Or, si on trace le cercle passant par ces points, on constate qu'il passe également par le point D. On a, d'une part :

$$\widehat{JGL} = \widehat{BGL} = \pi - \widehat{BCL} = \widehat{HCL} = \widehat{HDL} = \pi - \widehat{LDJ}$$

de sorte que les points G, J, L et D sont cocycliques, et d'autre part :

$$\widehat{GJN} = \widehat{AJN} = \pi - \widehat{AEN} = \widehat{NEI} = \widehat{NDI} = \pi - \widehat{GDN}$$

de sorte que les points G, J, N et D sont cocycliques.
Ainsi les points G, L, D, N et J sont cocycliques.
Donc $\widehat{OKL} + \widehat{ONL} = \pi$.
On prouve de même la cocyclicité des points K, L, M et O.
Finalement, les points K, L, M, N et O sont cocycliques.

C.Q.F.D.

Baptiste GORIN relevé le 10/11/05 sur :